

Devoir surveillé n°3

Jeudi 9 décembre 2010

Durée 1h30

Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes de calcul doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies. Si vous rendez plusieurs copies, pensez à les numéroter.

Exercice 1 [4 points]

En utilisant les congruences, calculer le reste dans la division euclidienne par 101 des nombres suivants :

a) 4142

b) 44434241

Exercice 2 [4 points]

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux.

a) Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $au \equiv 1 \pmod{b}$.

b) Montrer que l'on peut choisir u entre 0 et $b - 1$.

Exercice 3 [2 points]

Montrer que le nombre $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est irrationnel.

Exercice 4 [4 points]

Soit $A = \left\{ \frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) L'ensemble A a-t-il un maximum ? une borne supérieure ? Si oui, donner leurs valeurs ?

b) Déterminer la borne inférieure de A . Est-ce un minimum ?

Exercice 5 [4 points]

Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, 1 \right]$. Cet ensemble est-il un intervalle ? Si oui, lequel ?

Exercice 6 [4 points]

Soient $a < b$ deux réels. Montrez que

$$|x - a| \leq |x - b| \iff x \leq \frac{a + b}{2}.$$