Université Paul Sabatier | **Toulouse**
L1-IMP-Math 2 | **Année 2010-2011**

CORRECTION DU DS2

Exercice 1. L'algorithme d'Euclide se base sur les divisions euclidiennes successives :

$$401 = 3 \times 130 + 11, \qquad 130 = 11 \times 11 + 9, \qquad 11 = 1 \times 9 + 2, \qquad 9 = 4 \times 2 + 1, \qquad 2 = 2 \times 1 + 0.$$

Le pgcd de 401 et 130 vaut donc 1.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

– La formule du binome de Newton donne le développement

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i.$$

– (Interprétation combinatoire). On peut récrire cette relation comme suit :

Cas 1 : n pair, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{2i} = \sum_{i=1}^{p} \binom{n}{2i-1}$

Cas 2 : n impair, $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{2i+1}$

Dans les deux cas l'égalité signifie que dans un ensemble à n éléments, il y a autant de sous-ensembles de cardinal pair que de sous-ensembles de cardinal impair.

Exercice 3. Il y a 90 nombres palindromes entre 1000 et 9999. En effet, un nombre palindrome est un nombre réversible donc il peut s'écrire en base 10 comme $abba = a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a$, avec ici $1 \leq a \leq 9$ car on veut qu'il soit entre 1000 et 9999. Nous avons donc 9 choix pour a et 10 choix pour b.

Plus formellement on peut montrer que l'application de $\{1, \dots, 9\} \times \{0, 1, \dots, 9\}$ dans l'ensemble des palindromes compris entre 1000 et 9999, définie par $(a, b) \mapsto a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a$ est bijective.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On montre par le calcul direct que $nC_{2n}^{n} = (n+1)C_{2n}^{n-1}$:

$$(n+1)\binom{2n}{n-1} = (n+1)\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = n\frac{(2n)!}{n!n!} = n\binom{2n}{n}$$

2) Pour montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux, on utilise par exemple l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} n+1 &= 1 \times n + 1 \\ n &= 1 \times n + 0 \end{aligned}$$

3) D'après 1) on a que $n+1$ divise nC_{2n}^{n}, or 2) nous permet d'appliquer le théorème de Gauss qui s'énonce ainsi : $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$

$$\big(\mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } a \mid bc\big) \implies a \mid c\,.$$

Ainsi, pour $a = n+1$, $b = n$ et $c = C_{2n}^{n}$ on obtient que $n+1$ divise C_{2n}^{n} .

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On remarque que $2^{3n} - 1 = (2^3 - 1)(1 + 2 + \cdots + (2^3)^{n-1})$ est divisible par $2^3 - 1 = 7$.
2) Comme $2^{3n+1} - 2 = 2(2^{3n} - 1)$ et $2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1)$, ils sont aussi divisibles par 7.
3) Soit $p \in \mathbb{N}$, alors par la division euclidienne : $p = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$ et $q \in \mathbb{N}$. D'où, $2^p = 2^{3q+r}$. Si $q \geq 1$, les questions précédentes nous assurent que le reste de la division par 7 de $2^p = 2^{3q+r}$ peut valoir 1, 2, ou 4. Pour $q = 0$ on a les trois cas : $2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4$. L'ensemble des restes possibles pour la division euclidienne par 7 des puissances de 2 est donc $\{1, 2, 4\}$.