UNIVERSITÉ PAUL SABATIER – ANNÉE 2009-2010
LICENCE $1^{\text{ère}}$ année – IMP – Math2

Devoir surveillé – 15 octobre 2009 – durée 1H30

Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies. Si vous rendez plusieurs copies, pensez à les numéroter

Exercice 1. (5 points)
Etudier la convergence des suites définies pour $n \geq 0$ par

$$x_n = \frac{n + 5n^2}{1 + 2n^4} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{n^2 + n\cos(n) - n^3}{2n^2 + 1}.$$

Exercice 2. (5 points)

1. Soient A et B des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majoré.
   (a) Montrer que A est majoré.
   (b) Etablir l'inégalité $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.
   (a) Justifiez l'existence pour $n \in \mathbb{N}$ de la quantité $s_n = \sup(A_n)$ où $A_n = \{v_k;\ k \geq n\}$.
   (b) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in N}$ est monotone puis qu'elle converge.

Exercice 3. (10 points)
Le but de cet exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.

4. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k^2} \geq \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

5. Déduire de la question précédente que si $1 \leq p < n$,

$$u_p + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq u_p + \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

puis proposer un encadrement de ℓ en fonction de p et u_p.

6. Expliciter l'encadrement de ℓ obtenu pour $p = 1$ et $p = 2$ en donnant le développement décimal des bornes. A partir de quelle valeur de p obtient-on une approximation de ℓ à 10^{-2} près?

Exercice 4. (hors barème)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite un nombre $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer en utilisant la définition de limite que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

2. On suppose maintenant que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.