Université Paul Sabatier **Toulouse**
UE 8 **Année 2009-2010**

DEVOIR MAISON

Exercice 1 : Equation diophantiennes.

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, $xy = 2x + 3y$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $x(x+7)(x+1)(x+8) = y^2$.

Exercice 2 : Coefficient binomiaux.

1. Etablir, pour tout (n, p, q) de $\mathbb{N}^3$ tel que $n \leq p + q$:
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} .$$
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (\frac{n-2k}{n} \binom{n}{k})^2 = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} .$$

Exercice 3 : Le groupe symétrique. On va démontrer que le groupe symétrique S_n est un groupe pour la loi de composition $\circ$.

1. Calculer $(23154) \circ (23415)$.
2. Démontrer que pour tout $\sigma, \tau \in S_n$, alors $\sigma \circ \tau \in S_n$.
3. Démontrer que $\circ$ est associative.
4. Démontrer que $\circ$ admet un élément neutre.
5. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, il existe un inverse.

On appelle une transposition échangeant i et j, notée τ_{ij}, la permutation de $\{1, \ldots, n\}$, définie par $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, et $\tau_{ij}(k) = k$, pour tout $k \neq i, j$. On va démontrer par récurrence que toute permutation est décomposable en produit de transpositions.

6. Montrer que c'est vrai pour $n = 2$.
7. Donner une décomposition en produit de transposition de la permutation (63748152).

Soit $n \geq 2$. On suppose que les transpositions de $\{1, \ldots, n\}$ engendrent S_n. Soient $\sigma \in S_{n+1}$.

8. On suppose $\sigma(n+1) = n+1$. (Montrer que $\{1, \ldots, n\}$, est stable par σ et utiliser l'hypothèse de récurrence.)

On suppose $\sigma(n+1) \neq n+1$. Considérons $\rho := \tau_{n+1,\sigma(n+1)}$.

9. Calculer $\rho(n+1)$.
10. Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des transpositions $t_1, \ldots, t_N$ de $\{1, \ldots, n+1\}$, telles que $\rho = t_1 \circ \cdots \circ t_N$.
11. En déduire une décomposition de σ.