Université Paul Sabatier **Toulouse**
UE 8 **Année 2009-2010**

DEVOIR MAISON

Exercice 1 : Calcul de bornes supérieures. Quelles sont les bornes supérieures et inférieures, dans $\mathbb{R}$ des ensembles E suivants, si elles existent :

1. $E = \{\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,
2. $E = \{\frac{1+(-1)^n}{n} - n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2 : Borne supérieure. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, on note

$$A + B := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\} ,$$
$$-A := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\} .$$

1. On suppose que A et B sont majorées, monter que $A + B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et que $Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$.
2. On suppose que A est majorée, montrer que $-A$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et que $Inf(-A) = -Sup(A)$.

Exercice 3 : Suites numériques.

1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que u_n est croissante et majorée, donc qu'elle converge.
2. Montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $\frac{\cos n}{n}$.
3. Soient $u_{n+1} = 2u_n$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ et $u_0 = v_0 = 1$. Etudier la convergence des deux suites.

Exercice 4 : Suites numériques. Posons $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$.

1. Démontrer que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la définition de la limite, démontrer que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
2. Calculer la limite de la suite $v_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.