Équations aux q-différences et classification

Anton ELOY
Université Paul Sabatier, Institut de maths de Toulouse, Thèse sous la direction de Jacques Sauloy

Définition ❶

Soit q un nombre complexe non nul.
Une équation aux q-différences linéaire de degré n est une équation de la forme

$$f(q^n z) + a_{n-1}(z) f(q^{n-1} z) + \cdots + a_0(z) f(z) = u(z)$$

où les a_i et u sont des fonctions définies presque partout sur les complexes et où l'inconnue est la fonction f.
Quand $u = 0$, l'équation est dite homogène et on peut alors la regarder sous la forme d'un système $X(qz) = A(z)X(z)$ où X est un vecteur de n fonctions et A une matrices de n^2 fonctions (un tableau de fonctions); ici l'inconnue sera le vecteur X.

Exemple ❷

Une solution de l'équation $f(qz) = zf(z)$ est la fonction thêta-q de Jacobi :

$$\theta_q(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2} z^n$$

C'est une forme particulière de la fonction thêta de Jacobi, solution de *l'équation de la chaleur*, une des équations (différentielles) les plus connues des mathématiques et de la physique.

Des équations "naturelles" et géométriques ❸

Ces équations apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique :

1. Elles proviennent surtout de la physique quantique et de l'étude mathématique de ce que l'on appelle "groupes quantiques", d'où la notation q utilisée.
2. Elles sont très reliées aux équations dites "différentielles", qui regardent la manière dont une fonction est liée à sa dérivée; en fait quand q tend vers 1 *d'une certaine manière* on a
$$\frac{f(qz) - f(z)}{q-1} \underset{q \to 1}{\longrightarrow} zf'(z)$$
3. Et c'est loin d'être exhaustif !

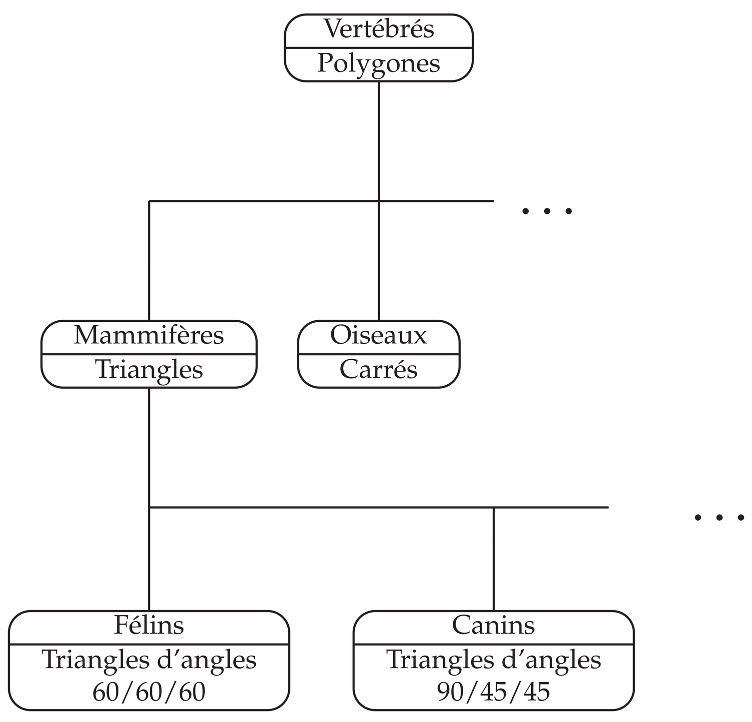
De plus elles ont un caractère géométrique, puisque leur étude revient à l'étude des fibrés vectoriels sur un tore, c'est-à-dire à l'étude des divers objets fabriqués en plantant des espaces vectoriels (droites, plans, ...) sur chaque point d'un tore (la forme du doughnut/donut).

Tore poilu ❹

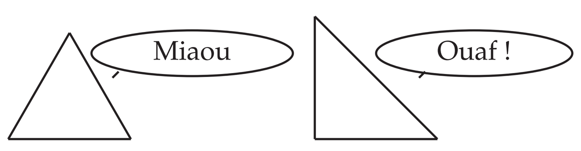
Le doughnut poilu, ou fibré vectoriel de dimension 1 sur le tore : son étude est équivalente à l'étude des équations $f(qz) = a(z)f(z)$.

Classification et invariants ❺

Une obsession très répandue chez les mathématiciens est la classification des choses. Une grande partie du travail mathématique revient à regarder quand deux objets sont suffisamment similaires pour que l'étude de l'un revienne à l'étude de l'autre. Bien sûr la notion vague de "suffisamment similaire" dépend toujours du contexte. Ainsi, si l'on étudie les triangles, on va classer ensemble les triangles semblables (dont les côtés sont deux-à-deux proportionnels), tandis que si l'on étudie les polygones en général on pourra mettre d'un côté l'ensemble des triangles, d'un autre l'ensemble des carrés... On crée alors un nouvel objet mathématique, la classe, qui va être l'ensemble des éléments similaires.



Le principe est le même qu'en biologie : on regroupe ensemble des objets/animaux ayant des traits communs, puis on affine en plusieurs étapes.

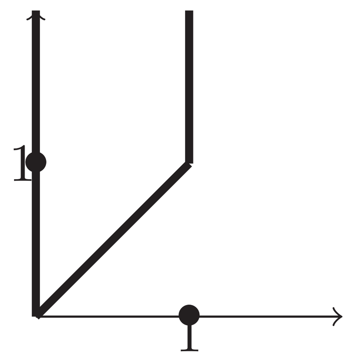


Ici, l'invariant des mammifères serait "vertébrés à poils" tandis que celui des oiseaux serait "vertébrés à plumes".

Cela amène à la notion d'invariants : une caractéristique, souvent symbolisée par un nombre, qui va être associée à un objet de manière à ce que deux objets similaires se voient affecter le même invariant ; c'est cet invariant qui va "décrire" la similitude. Dans nos exemples de dessus, les invariants pourraient être les angles des triangles dans le premier cas, et le nombre de côté des polygones dans le second. Dans des cas moins géométriques le nombre d'éléments d'un ensemble (son cardinal) ou la dimension d'un espace vectoriel sont des invariants.

Classification des équations ❻

1. Les équations aux q-différences homogènes sont tout d'abord classées par leurs pentes, des nombres rationnels qui représentent la manière dont les coefficients de l'équation s'annulent ou sont mal définis en 0.
Plus précisément ce sont les pentes du polygone convexe créé en mettant sur un graphe les points (i, j) où j est l'ordre d'annulation de $a_{n-i}(z)$ ($\min\{k | a_{n-i}^{(k)}(z) \neq 0\}$).



Polygone associé à $f(qz) - zf(z) = 0$: le premier coefficient $a_1(z) = 1$ ne s'annule pas et le second $a_0(z) = z$ s'annule à l'ordre 1 : on a donc une pente $\mu_1 = 1$.

2. On peut ensuite raffiner notre classification en regardant des classes formelles : quand on prend un système de degré 2 avec deux pentes $\mu_1 < \mu_2$ entières, il est équivalent dans un sens dit "formel" au système

$$X(qz) = \begin{pmatrix} az^{\mu_1} & 0 \\ 0 & bz^{\mu_2} \end{pmatrix} X(z)$$

Le couple de complexes (a, b) est alors un invariant formel.
3. On peut, quand on regarde une classe formelle, être plus précis encore en regardant des similarités plus fines : c'est la classification isoformelle (*i.e.* objets de la même (*iso*) classe formelle). Un système est alors équivalent au sens dit "analytique" au système

$$X(qz) = \begin{pmatrix} az^{\mu_1} & u \\ 0 & bz^{\mu_2} \end{pmatrix} X(z)$$

où u est un certain polynôme en z qui sera notre nouvel invariant.
Regarder une classe isoformelle suffit généralement à en savoir assez sur les solutions des tels systèmes : la classification paraît *a priori* suffisante.

Variation des systèmes ❼

Nous avons donc réussi à mettre dans des cases de plus en plus fines nos systèmes aux q-différences homogènes, ce qui nous permet de les étudier séparément. Mais ce n'est pas parce qu'ils sont dans des cases séparées qu'il n'y a pas de liens entre eux ! En effet on pourrait avoir, dans un cadre physique par exemple, une équation qui varie en fonction du temps et qui passerait par plusieurs classes, formelles ou isoformelles.
Pour étudier cela on utilise encore le principe des fibrés : on "plante" au dessus de chaque couple (a, b) de complexes (soit au dessus de chaque classe formelle) l'ensemble des classes isoformelles et on peut ensuite regarder géométriquement comment varient ces choses.